ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ*

Для одного специального случая (колеблющаяся струна, естественные граничные условия) показывается, что спектр собственных значений однозначно определяет дифференциальное уравнение (в теории Шредингера „уравнение амплитуд").

Для некоторых областей теоретической физики (волновая механика, теория колебаний), которые приводят к проблеме собственных значений, является важным вопрос об однозначном определении механической системы (т. е. гамильтоновой функции) посредством спектра собственных значений соответствующего линейного дифференциального уравнения. Если спектр действительно полностью определяет дифференциальное уравнение, то возможно, например, практически определить строение какой-либо атомной системы из спектра, т. е. решить задачу, так сказать, обратную проблеме Шредингера**. Но общий подход к проблеме ведет к ряду трудностей.

Мы здесь рассмотрим только специальный случай. Мы докажем, что из всех уравнений

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} - q(x)\,\varphi + \alpha\varphi = 0,$$

где α — параметр собственных значений, $q(x)$ — непрерывная функция и μ — постоянная, при „естественных граничных условиях": $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ только уравнение колеблющейся струны со свободными концами

$$\varkappa \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha\varphi = 0$$

имеет собственные значения

$$\alpha_n = \varkappa n^2.$$

---

* Über eine Frage der Eigenwerttheorie. Zs. f. Physik, **53**, 690, 1929.

** Этим замечанием я обязан Д. Д. Иваненко.

§ 1. Прежде всего мы рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(py')' - gy - \lambda ry + \alpha y = 0, \tag{1}$$

где λry возмущающий член, r, p, p' — непрерывные функции от x и $p > 0$.

Дифференциальное уравнение (1) имеет для заданных граничных условий $y'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ счетное множество собственных значений, которые мы можем расположить в порядке возрастающих значений:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots . \tag{2}$$

Эти собственные значения являются функциями от λ. Мы покажем, что эти функции не имеют действительной особой точки. Легко видеть, что для этого достаточно доказать, что $\alpha_i(\lambda)$ являются регулярными аналитическими функциями λ в окрестности $\lambda = 0$, поскольку таким образом мы доказываем наше утверждение для уравнения

$$(py')' + (q - \lambda_0 r) y - (\lambda - \lambda_0) ry + \alpha y = 0 \tag{3}$$

в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, где λ_0 есть любое действительное число. Но уравнение (3) идентично с уравнением (1). Прежде всего предположим, что $\alpha = 0$ не является собственным значением уравнения

$$(py')' - gy - \alpha y = 0. \tag{1'}$$

Тогда дифференциальное выражение

$$L[y] = (py')' - gy$$

имеет функцию Грина $G(x, \xi)$.

Степенной ряд

$$S(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi) + \lambda G_2(x, \xi) + \lambda^2 G_3(x, \xi) + \cdots, \tag{4}$$

в котором

$$G_n(x, \xi) = \int \cdots \int G(x, t_1)\, r(t_1)\, G(t_1, t_2)\, r(t_2) \ldots$$
$$\cdots r(t_{n-1})\, G(t_{n-1}, \xi)\, dt_1, dt_2 \ldots dt_{n-1}$$

сходится в круге $|\lambda| < \rho$, так как функции $G(x, \xi)$ и $r(x)$ ограничены. Сумма этого ряда, которая равна

$$S(x, \xi; \lambda) = \frac{k(x, \xi; \lambda)}{r(\xi)},$$

где $k(x, \xi; \lambda)$ представляет разрешающее ядро (резольвенту) ядра $G(x, \xi)\, r(x)$, является для $|\lambda| < \rho$ функцией Грина дифференциальной формы

$$L[y] - \lambda ry = (py')' - gy - \lambda ry.$$

Собственные значения уравнения (1) являются нулевыми точками знаменателя Фредгольма для ядра $S(x, \xi; \lambda)$, т. е. мы можем определить для $|\lambda| < \rho$ эти собственные значения посредством уравнения:

$$D(\alpha, \lambda) = 1 - \frac{1}{1!} D_1(\lambda)\,\alpha + \frac{1}{2!} D_2(\lambda)\,\alpha^2 - \frac{1}{3!} D_3(\lambda)\,\alpha^3 + \ldots = 0, \qquad (5)$$

где

$$D_n(\lambda) = \int \cdots \int \begin{vmatrix} S(x_1, x_1; \lambda), & S(x_1, x_2; \lambda) & \cdots & S(x_1, x_n; \lambda) \\ S(x_2, x_1. \lambda), & S(x_2, x_2; \lambda) & \cdots & S(x_2, x_n; \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S(x_n, x_1; \lambda), & S(x_n, x_2; \lambda) & \cdots & S(x_n, x_n; \lambda) \end{vmatrix} dx_1,\, dx_2 \cdots dx_n.$$

Ряд (5) является равномерно сходящимся при $|\lambda \leqslant \rho - \varepsilon$, где ε — любое положительное число, и при всех конечных α [1]. Следовательно, он представляет аналитическую функцию обеих переменных и общими кругами сходимости являются вся α-плоскость и круг $|\lambda| < \rho$.

Если мы разложим $D(\alpha, \lambda)$ по степеням $\alpha - \alpha_i(0)$ и λ, то, учитывая тот факт, что $\alpha_i(0)$ является простым корнем уравнения $D(\alpha, 0) = 0$, мы заметим, что постоянный член разложения изчезает, но коэффициент при $[\alpha - \alpha_i(0)]$ отличается от нуля. Согласно правилу о неявных функциях мы можем утверждать, что в некотором круге сходимости функция $\alpha_i(\lambda)$, т. е. корень уравнения $D(\alpha, \lambda) = 0$, который переходит в $\alpha_i(0)$ при $\lambda = 0$, может быть разложен в ряд по степеням λ. Таким образом, собственные значения являются аналитическими функциями параметра возмущений λ в окрестности $\lambda = 0$, если только $\alpha = 0$ не является собственным значением уравнения (1′). Последнее условие, однако, является совершенно не существенным. Действительно, если $\alpha = 0$ является собственным значением уравнения (1′), то пусть k есть следующее по абсолютной величине собственное значение. Тогда мы можем рассматривать уравнение

$$(py')' - \left(g + \frac{k}{2}\right)y + \beta y = 0, \qquad (6)$$

для которого $\beta = 0$ не является собственным значением. Мы можем теперь сказать, что собственные значения уравнения

$$(py')' - \left(g + \frac{k}{2}\right)y - \lambda r y + \beta y = 0 \qquad (7)$$

являются аналитическими функциями λ (в окрестности $\lambda = 0$). Но собственные значения уравнений (7) и (1) отличаются друг от друга только постоянной величиной $\frac{k}{2}$. Поэтому последние также являются аналитическими функциями от λ.

Мы можем теперь утверждать, что для каждого действительного λ собственные значения уравнения (1) являются аналитическими функциями λ*.

§ 2. Тот же самый способ, что и в прошлом параграфе, показывает нам, что $D(x, \xi; \alpha, \lambda)$ (числитель Фредгольма) также является аналитической функцией обеих переменных α и λ во всей α-плоскости и в круге $|\lambda| < \rho$.

Если мы обозначим нормированные собственные функции дифференциального уравнения (1') через

$$\varphi_1(x, \lambda),\ \varphi_2(x, \lambda),\ \ldots, \tag{8}$$

то известно, что произведения $\varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_i(\xi, \lambda)$ образуют в точках $\alpha = \alpha_i(\lambda)$ вычеты резольвенты

$$\Gamma(x, \xi; \alpha, \lambda) = \frac{D(x, \xi; \alpha, \lambda)}{D(\alpha, \lambda)}.$$

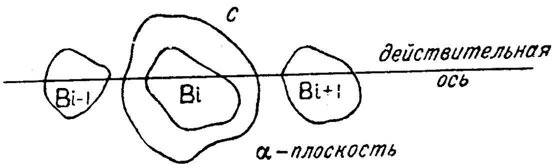
Мы имеем:

$$\varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_i(\xi, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \Gamma(x, \xi; \alpha, \lambda)\, d\alpha, \tag{9}$$

где кривая C включает на α-плоскости точку $\alpha_i(\lambda)$, но не содержит никакой другой $\alpha_j(\lambda)$ $(j \neq i)$. При изменении λ в области $|\lambda| < a < \rho$, где a является положительным числом, которое мы позднее выберем, каждое собственное значение изменяется в области B_i. Легко видеть, что для достаточно малого a ни одна из областей $B_j\ (j \neq i)$ не имеет общих точек с B_i. Это следует из того, что, с одной стороны, благодаря экстремальным свойствам собственных значений при ограниченных изменениях λ все изменения собственных значений равномерно ограничены. С другой стороны, если $\alpha_1(\lambda), \ldots \alpha_N(\lambda)$ есть первые N собственных значений, являющиеся аналитическими функциями от λ, тогда мы можем выбрать N столь большим, чтобы $\alpha_{N+1}(\lambda), \ldots$ для каждого $|\lambda| < \rho$ было больше, чем $\alpha_i(\lambda)$ для того же λ.

* Это утверждение можно доказать иным путем несколько короче, но наше доказательство включает, по-видимому, возможность распространения на случай нескольких независимых переменных. В этом случае, однако, обнаруживаются трудности, связанные с многократными собственными значениями.

Так как ни одна пара $\alpha_i(0)$ друг с другом не совпадает, мы можем принять a столь малым, чтобы для $|\lambda| < a$ все $\alpha_i(\lambda)$ $(i=1, \cdots N)$ были регулярны и чтобы ни одна пара областей B_i не имела общих точек. Теперь мы выбираем C так, что она включает область B_i, но не включает ни одну точку области B_j $(j \neq i)$ (см. фиг. 1). Фор-



Фиг. 1.

мула (9) показывает тогда, что для достаточно малых λ функция $\varphi_i(x, \lambda)\,\varphi_i(\xi, \lambda)$ аналитически зависит от λ. Отсюда мы можем заключить, что $\varphi_i(x, \lambda)$ также является аналитической функцией λ.

Для дальнейших рассуждений важно ввести выражения для возмущенных собственных значений. Мы здесь запишем только первые члены разложения:

$$\alpha_i(\lambda) = \alpha_i(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\,\varepsilon_{ii}(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)^2 \sum_{j=1}^{\infty}{}' \frac{\varepsilon_{ij}(\lambda_0)}{\alpha_i(\lambda_0) - \alpha_j(\lambda_0)} + \cdots, \tag{10}$$

где штрих при знаке суммирования означает, что суммирование должно распространяться на все j, кроме $j=i$, и кроме того вводится обозначение

$$\varepsilon_{ij}(\lambda_0) = \int_0^{\pi} r(x)\,\varphi_i(x, \lambda_0)\,\varphi_j(x, \lambda_0)\,dx. \tag{11}$$

§ 3. Предположим теперь, что уравнение

$$\mu \frac{d^2\varphi}{dx^2} - r(x)\,\varphi + \alpha\varphi = 0 \tag{12}$$

имеет ту же систему собственных значений, что и уравнение

$$\varkappa \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \alpha\varphi = 0$$

для граничных условий: $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$.

Из этого непосредственно следует, что $\mu = \varkappa$. Действительно, асимптотическими выражениями для собственных значений уравнений (11) и (12) являются

$$\alpha_n = n^2\mu + O(1)$$

$$\alpha_n = n^2\varkappa + 0\,(1),$$

откуда следует: $\mu = \varkappa$.

Напишем теперь уравнения

$$\varkappa\,\frac{d^2\varphi_i\,(x, 0)}{dx^2} + \alpha\varphi_i\,(x, 0) = 0,$$

$$\varkappa\,\frac{d^2\varphi_i\,(x, 1)}{dx^2} - r\,(x)\;\varphi_i\,(x, 1) + \alpha_i\,\varphi_i\,(x, 1) = 0;$$

умножим первое уравнение на $\varphi_i\,(x, 1)$ и второе на $\varphi_i\,(x, 0)$, затем вычтем второе из первого и проинтегрируем; тогда, благодаря формуле Грина, получим:

$$\int r\,(x)\;\varphi_i\,(x, 0)\;\varphi_i\,(x, 1)\;dx = 0. \tag{13}$$

Теперь мы имеем следующие асимптотические выражения для собственных функций

$$\varphi_i\,(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos ix + 0\left(\frac{1}{i}\right),$$

$$\varphi_i\,(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos ix + 0\left(\frac{1}{i}\right).$$

Следовательно, мы имеем для $\varphi_i\,(x, 0)\;\varphi_i\,(x, 1)$ асимптотическое выражение

$$\varphi_i\,(x, 0)\;\varphi_i\,(x, 1) = \frac{2}{\pi}\cos^2 ix + 0\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{\pi}\,[1 + \cos 2ix] + 0\left(\frac{1}{i}\right).$$

Из

$$\lim_{i\to\infty}\int\limits_0^\pi r\,(x)\cos 2ix\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty}\int\limits_0^\pi r\,(x)\,0\left(\frac{1}{i}\right)dx = 0$$

и (13) мы заключаем

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{\pi}\int r\,(x)\;\varphi_i\;(x, 0)\;\varphi_i\;(x, 1)\,dx = \frac{1}{\pi}\int r\,(x)\,dx = 0.$$

Но так как $\varphi_1\,(x, 0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, то мы можем, согласно (10), разложение $\alpha_1\,(\lambda)$ для $\lambda_0 = 0$ привести к виду

$$\alpha_1\,(\lambda) = -\lambda^2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\varepsilon_{1j}^2}{\alpha_j\,(0)} + \cdots, \tag{14}$$

т. е. для достаточно малых λ значение $\alpha_1(\lambda)$ отрицательно. Таким же образом $\alpha_1'(\lambda)$, как легко доказать посредством дифференцирования (14), для достаточно малого положительного λ отрицательно. Мы, однако, уже приняли, что $\alpha_1(0) = \alpha_1(1) = 0$, откуда видно, что $\alpha'(\lambda)$ в какой-то точке между нулем и единицей также положительно и, следовательно, где-то меняет свой знак. Пусть $\lambda = \delta$ является точкой, в которой $\alpha'(\delta) = 0$. Так как мы имеем $\alpha_1'(0) = 0$, то мы должны ожидать, что в некоторой точке δ_1 вторая производная $\alpha''(\lambda)$ становится равной нулю:

$$\alpha''(\delta_1) = 0$$

или, согласно (10),

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^2(\delta_1)}{\alpha_1(\delta_1) - \alpha_j(\delta_1)} = 0.$$

Так как все слагаемые отрицательны, то мы получаем:

$$\varepsilon_{1j}^2(\delta_1) = 0, \quad \varepsilon_{1j}(\delta_1) = 0 \qquad (j \neq 1). \tag{15}$$

Однако, согласно (11), ε_{1j} являются коэффициентами разложения функции $q(x)\varphi(x_1, \delta_1)$ по системе ортогональных функций $\varphi_j(x, \delta_1)$ $(j = 1, 2, \cdots)$. Из полноты системы и из (15) следует, что

$$r(x)\varphi_1(x, \delta_1) = C\varphi_1(x, \delta_1)$$

или $r(x) = C$.

С другой стороны, $\int_0^{\pi} r dx = 0$, откуда $C = 0$.

Следовательно $r(x) = 0$.

Я выражаю свою глубокую благодарность профессору В. И. Смирнову за его ценные замечания к настоящей работе.

Пулково, Обсерватория,
21 декабря, 1928.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Courant und D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, 126 1924.

Примечание. Составленная В. А. Амбарцумяном в этой статье задача об отыскании дифференциального уравнения по собственным значениям рассматривалась в последнее время в ряде математических работ.